Université Paris Dauphine
2024-2025

Introduction aux séries temporelles
TD3 - Processus ARMA

Exercice 1

1. Résoudre l'équation ARMA suivante :

$$X_t = 3X_{t-1} + Z_t - \frac{10}{3}Z_{t-1} + Z_{t-2} \qquad t \in \mathbb{Z},$$

   où Z est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ^2. Préciser la moyenne et la fonction d'auto-covariance de la solution.

2. Mêmes questions pour

$$X_t = X_{t-1} - \frac{1}{4}X_{t-2} + Z_t + Z_{t-1} \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 2 (ARMA$(1,1)$) On considère l'équation

$$X_t - \phi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1},$$

où (Z_t) est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ^2 et ϕ et θ sont des réels.

1. Si $\phi \neq \pm 1$, montrer qu'il existe une unique solution stationnaire ; la calculer, donner sa moyenne et sa fonction d'auto-covariance.
2. Si $\phi = 1$ et X est solution, montrer que, pour tout $t \geq 1$,

$$X_t = X_0 + \theta Z_0 + (1+\theta)\sum_{s=1}^{t-1} Z_s + Z_t.$$

   En déduire que, si $\theta \neq -1$, il n'y a pas de solution stationnaire.
3. Montrer de même qu'il n'y a pas de solution stationnaire si $\phi = -1$ et $\theta \neq 1$.
4. On suppose maintenant que $\phi = 1$ et $\theta = -1$. Montrer que les solutions de l'équation sont les processus de la forme $X_t = Z_t + \xi$, où ξ est une variable aléatoire. Montrer qu'un tel processus est stationnaire si on suppose que ξ est de carré intégrable et décorrélée de Z.
5. Trouver de même les solutions stationnaires lorsque $\phi = -1$ et $\theta = 1$.

Exercice 3 (MA(1)) Soit (Z_t) un bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ^2, θ un réel et X le processus donné par $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$ pour $t \in \mathbb{Z}$. Montrer que X est un processus stationnaire de fonction d'auto-covariance donné par

$$\gamma_X(h) = \begin{cases} a & \text{si } h = 0 \\ b & \text{si } h = \pm 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où a et b sont des réels que l'on déterminera, avec $|b| \leq a/2$.

On veut montrer maintenant que, si X est un processus stationnaire ayant une fonction d'auto-covariance de cette forme, alors il existe un bruit blanc Z et un réel θ tels que $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

1. On suppose ici que $|b| < a/2$. Montrer qu'on peut résoudre le problème en choisissant $|\theta| < 1$ et Z un filtrage causal de X. Quel est le problème si $|b| = a/2$?

2. On suppose maintenant que $b = -a/2$. On pose $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ pour tout $n \geq 1$.

   (a) Montrer que $\text{Var}(Y_n) = a$ et $\text{Cov}(Y_n, Y_m) = a/2$ pour tout entiers distincts n et m.

   (b) En déduire que $(1/n) \sum_{k=1}^{n} Y_k$ converge dans L^2 vers une variable aléatoire U.

   (c) Montrer que les variables aléatoires $Y_n - U$ sont décorrélées et conclure.

3. Résoudre de même le problème lorsque $b = a/2$.

Exercice 4 Soient Z et W des bruits blancs standards décorrélés et soient $\phi, \psi \in [0, 1[$. On s'intéresse aux solutions stationnaires de X et Y de

$$\begin{cases} Y_t = \phi Y_{t-1} + X_t + W_t \\ X_t = \psi X_{t-1} + Z_t \end{cases}$$

1. Montrer que la seconde équation définit une unique solution stationnaire X, qu'on explicitera et dont on calculera la moyenne et la fonction d'auto-covariance.

2. Montrer que $X + W$ est stationnaire ; calculer sa moyenne et sa fonction d'auto-covariance.

3. En déduire que la première équation définit un unique processus stationnaire Y.

4. Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on pose $V_t = Y_t - (\phi + \psi)Y_{t-1} + \phi\psi Y_{t-2}$. En utilisant l'exercice 3, montrer qu'il existe un réel θ et un bruit blanc H tels que $V_t = H_t + \theta H_{t-1}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

5. En déduire que Y satisfait une certaine équation ARMA conduite par le bruit blanc H.

6. Résoudre cette équation ARMA (on pourra distinguer les cas $\phi = \psi$ et $\phi \neq \psi$).

Exercice 5 (Perte d'unicité de la solution d'ARMA) Soit P un polynôme à coefficients réels possédant une racine de module 1.

1. On note B l'opérateur de retard. Montrer qu'il existe un processus harmonique Y solution de $P(B)Y = 0$ (i.e., il existe $\theta \in \mathbb{R}$, U et V des variables aléatoires centrées, de variance 1 et décorrélées, telles que $Y = U\cos(\theta t) + V \sin(\theta t)$ vérifie $P(B)Y = 0$).

2. Soit Q un polynôme dont les racines de modules 1 compensent celles de P (au sens où, si on écrit $Q/P = Q_1/P_1$ avec P_1 et Q_1 premiers entre eux, alors P_1 n'a pas de valeur propre de module 1). Montrer que l'équation ARMA $P(B)X = Q(B)Z$ possède une solution stationnaire qui n'est pas un filtrage de Z.